دالة تزايدية $\Delta f(x) \geq 0$

الأستاذ عبد الملك [illegible] — الخميس 2015/11/5

مثال:

دالة ديريكليه لاحظنا أنه $|f| = 1$ وهي ذات تغير محدود في حين f ليست ذات ت.م. بالتالي

$$f \text{ ذ.ت.م } \not\Leftarrow |f| \text{ ذ.ت.م}$$

ملاحظة:

عند تابع المثال السابق دالة ديريكليه تغيرها الكلي.

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}(|f|) = 0$$

معايير امتلاك الدالة ذ.ت.م:

لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ كما رأينا تعريف الدالة ذات تغير محدود أي أنها ... سنطلق المعايير التالية تحدد متى تكون الدالة ذ.ت.م على فترة ما.

(1) الدالة المطردة:

كل دالة مطردة تزايدياً أو تناقصياً (الرتيبة/المطردة) على $[a,b]$ هي ذات ت.م عليها ويكون تغيرها الكلي: $\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = |f(b) - f(a)|$

الإثبات:

لتكن $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ ولنفرض أنها تزايدية ونأخذ:

$$P_{[a,b]} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

تجزئة اختيارية لـ $[a,b]$ عندها تكون:

$$V(f;P) = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

$$\overset{\text{تزايدية}}{=} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$= f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})$$

$$= f(x_n) - f(x_0) = \text{عدد محدود}$$

ما يعني أن الدالة f ذ.ت.م على $[a,b]$ بتغير الكلي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(b) - f(a) \quad ①$$

أما إذا كانت مطردة تناقصياً على $[a,b]$:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = f(a) - f(b) \geq 0 \quad ②$$

مثال.

الدالة $f(x)=\ln x$ على $[1,e]$ ذات تغير محدود وتغيرها الكلي:
لأنها متزايدة تماماً:

$$\overset{e}{\underset{1}{V}}(\ln x) =$$

نحصل على e من مجموع متسلسلة متقاربة

$$e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

نعوض كل $x=1$ نحصل على e

$$\overset{e}{\underset{1}{V}}(\ln x)=\ln e-\ln(1)=1$$

حيث الدالة متزايدة تماماً على $]0,\infty[$ وبالتالي على

$[1,e]\subset\,]0,\infty[$

مثال:

الدالة $g(x)=[x]$ متزايدة على R على أي فترة جزئية مثل $[0,2]$ فهي ذات تغير محدود عليها وتغيرها الكلي:

$$\overset{2}{\underset{0}{V}}(g)=[2]-[0]=2$$

(2) المطردة جزئياً:

هذا المعيار أعم من سابقه.

لتكن $f:[a,b]\to R$ ولنكن تجزئة الفترة $[a,b]$ إلى عدد منته من الفترات الجزئية $[c_k,c_{k+1}]$ حيث $k=0,1,\dots,m$
حيث تكون f مطردة على كل منها.
عندئذ تكون هذه الدالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ويكون:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)=\sum_{k=0}^{m}\overset{c_{k+1}}{\underset{c_k}{V}}(f).$$

$$=\overset{c_1}{\underset{a=c_0}{V}}(f)+\overset{c_2}{\underset{c_1}{V}}(f)+\dots+\overset{b=c_{m+1}}{\underset{c_m}{V}}(f)$$ ⑤

مثال تطبيقي:

مثال: أوجد تغير الدالة $f(x) = \sin x$ ؟ $x \in [0, 2\pi]$

بدون رسمها (تأتي حساب 3 حدود).

3) الدالة f متقطعة الاتصال ذات عدد محدود من نقاط القفز:

سنعرض هنا أن الدالة تأخذ قيماً ثابتة من نقاط القفز لتحسب تغيرها على $[a, b]$.

إذا كانت الدالة $f : [a, b] \to \mathbb{R}$

نقاط القفز مجموعة أو لها هي:

$c_1, c_2, \ldots, c_m$

عدد منتهٍ من نقاط القفز.

حيث: $a = c_0 < c_1 < \ldots c_m < b = c_{m+1}$ وكانت الدالة تأخذ قيماً ثابتة على كل فترة مفتوحة (c_k, c_{k+1}) $(k = 0, 1, \ldots, m)$

مع العلم أن: $a = c_0, \; b = c_{m+1}$

فإن تغيرها على $[a, b]$

$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

يساوي مجموع القفزات بالقيمة المطلقة أي:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) = \left| f(a+0) - f(a) \right| + \sum_{k=1}^{m} \left\{ \left| f(c_k) - f(c_k - 0) \right| + \left| f(c_k + 0) - f(c_k) \right| \right\} + \left| f(b) - f(b-0) \right| \quad (4)$$

حيث $f(a+0) = \lim_{x \to a^+} f$ و $f(c_k - 0) = \lim_{x \to c_k^-} f$

$f(a+0) - f(a)$ عند a ، $f(b) - f(b-0)$ عند b.

مثال:

$$f = \begin{cases} x^2 ; & 0 \le x < 1 \\ 5 ; & x = 1 \end{cases}$$

وعند حساب الجهد المباشر تستخدم كل الحدود ما عدا المؤقتة لعدم الدالة ؟
(م ؛ أ) ٧
في المتطابقة ٢م ومطابقتها وتعويضها منه فنحصل على العلاقة المطلوبة.

تابع المحاضرة الأولى (الاستمرارات المحاضرة):

النهايات.

عند دراسة الدالة نهتم بالنهاية من اليمين للدالة المعرفة على الفترة I (

تحديداً من قبل مسبقاً) عند النقطة $a < x_0 < b$

ونرمز لها بالرمز $f(x_0+0)$ ونكتب:

$$\lim_{\substack{x > x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0+0)$$

تسمى النهاية من اليمين .

أي من الدالة عند x_0 من اليمين.

كما نهتم بالنهاية من اليسار عند النقطة x_0 ونرمز لها: $f(x_0-0)$

$$\lim_{\substack{x < x_0 \\ x \to x_0}} f(x) = f(x_0-0)$$

ونهتم عند النقطة b من اليسار وعند a بالنهاية من اليمين .

نقاط الانفصال من النوع الأول:

نقول إن الدالة f تعاني من انقطاع من النوع الأول في x_0 إذا وجدت النهايتان من اليمين ومن اليسار ولم تتساويا أي:

$$f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$$

أما القفزة عند النقطة x_0 حيث $a < x_0 < b$ فهي العدد $f(x_0+0) - f(x_0)$
من اليمين

وإذا كان هذا العدد $= 0$ تصبح الدالة مستمرة عندها من اليمين عند x_0

والقفزة في النقطة x_0 حيث $a < x_0 < b$ ~~[illegible]~~ هي العدد .

~~[illegible]~~ $f(x_0+0) - f(x_0-0)$. (*)

مثال:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , \ x \neq 0 \\ 1 & ; \ x = 0 \end{cases}$$

إذا كان (*) $\neq f(x_0)$ تسمى x_0 نقطة انقطاع قابلة للإزالة للدالة g .

ومن أجل القفزة من اليسار في النقطة x_0 نعرف العدد

$f(x_0 + 0) - f(x_0)$.

نتيجة:

الانقطاعات من النوع الأول في x_0 $(a < x_0 < b)$ لغير أو لعشرة عدد معدود.

ملاحظة (1):

نقاط انقطاع الدوال المطردة المعرفة على $[a,b]$ هي من النوع الأول

ملاحظة (2):

مجموعة نقاط انقطاع الدالة الرتيبة f على $[a,b]$ هي مجموعة منتهية أو معدودة (معدودة كل ذلك أي منتهية أو معدودة).

مثال:

$$y = [x] \quad ; \quad x \in [0, 2]$$

نقاط الانقطاع عددها = 2 وهو محدود.

$$f(1+0) - f(1-0) = 1 - 0.$$

- وإذا كانت النقاط $x_1, x_2, \dots$ من الفترة $[a,b]$ مما يجعلها f غير مستمرة فإنه يكون:

$$[f(a+0) - f(a)] + \sum_{k=1}^{n} [f(x_k+0) - f(x_k-0)] + [f(b) - f(b-0)] \le f(b) - f(a) \qquad (*1)$$

وإذا كانت f دالة خاصة مجموعة نقاط الانقطاع لها غير منتهية $x_1, \dots, x_n$ نقاط اختيارية من الفترة (a,b) يكون:

نفس المتباينة فقط المجموع من 1 إلى n $(*2)$

مثال:

لنأخذ هنا $y = g(x) = [x]$ ولنعرفها على الفترة $[0, 2]$ كما يلي وتكون الدالة المتزايدة معطاة بالشكل الآتي:

$$[x] = \begin{cases} 0 & ; \; 0 \le x < 1 \\ 1 & ; \; 1 \le x < 2 \\ 2 & ; \; x = 2 \end{cases}$$

نلاحظ أن نقاط الانقطاع داخل الفترة $(0, 2)$ هي النقطة الوحيدة $x = 1$ أما عند النقطة $x = 0$ لا تكون نقطة انقطاع

وفي هذه الفترة صحيح = 0 أما النقطة $x = 2$ فنأخذها من اليسار
فقط . والمقدار قيمة k هي : $(*_2)$

$$[f(0+0) - f(0)] + [f(1+0) - f(1-0)]$$

$$+ [f(2) - f(2-0)] \overset{?}{\leq} f(2) - f(0) .$$

$$= 0 + 1 + 2 - 1 = 2 \leq 2 .$$

ملاحظة .

الدالة $[x]$ الدرجية ثابتة قفزة = 1 العنصر عند كل عدد صحيح أي
$\in \mathbb{Z}$. ونكتب $\mathbb{Z}$ وليس Z

نعود للمحاضرة السابقة :

ملاحظة :

اذا كانت الدالة معرفة على فترة غير محدودة $(-\infty, b]$ مثلاً

فمن أجل أية فترة جزئية $[B, b] \subset (-\infty, b]$ نكون

حسبنا تغير الدالة ذات ت.م بشرط أن تكون الدالة محدودة على هذه الفترة

كما يمكن أن نكتب هنا:

$$\overset{b}{\underset{-\infty}{V}}(f) = \sup_{B<b} \overset{b}{\underset{B}{V}}(f) = \sup_{B<b} |f(b) - f(B)|$$

$$= |f(b) - f(-\infty)|$$

أي: $f(-\infty) = \lim_{B \to -\infty} f(B)$

وهكذا بالنسبة لباقي الفترات غير المحدودة. $[a, \infty)$ ، $(-\infty, \infty)$

دالة التغير :

يلزمنا هنا التعرف على الدوال المرتبطة بالدالة ذات ت.م علاقة ما

- لتكن $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ دالة ذات ت.م على $[a,b]$ عندئذ نسمي الدالة

المعرفة على النحو التالي:

$$v_f(t) = \begin{cases} \overset{t}{\underset{a}{V}}(f) , & a < t \le b \\ 0 , & t = a \end{cases}$$

دالة التغير (أو التغيير) للدالة f وهي تمثل التغير الكلي للدالة f

على الفترة $[a, t]$.

مبرهنة: (خواص دالة التغير)

اذا كانت f دالة ذات ت.م على $[a,b]$ فإن لدالة التغير $v_f = v_f(t)$ (والمتغير t)

الخواص التالية :

P1. محدودة على $[a,b]$ أي: $|v_f(t)| \le \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$

لأن التغير الكلي محدود.

P2. تزايدية على $[a,b]$ أي: $v_f(t_1) \le v_f(t_2)$ ، $a \le t_1 \le t_2 \le b$.

P$_3$) ذ.ت.م على $[a,b]$ لأنها تزايدية على $[a,b]$ حسب (P$_2$).

ملاحظة:

$$\overset{b}{\underset{a}{V}}(v_f) = \overset{b}{\underset{a}{V}}(f)$$

ملاحظة الفرض:

$$v_f(x) = f(x)$$

دالة تزايدية على $[a,b]$.

P$_4$) يلزم ويكفي لتكون دالة التغير مستمرة في النقطة x_0 من $[a,b]$ هو أن تكون الدالة f مستمرة في النقطة $x = x_0$ نفسها.

مثال: Example:

أوجد دالة التغير للدالة $g(x) = x^2 + 1$ على الفترة $[0,3]$.
ثم أوجد تغيرها الكلي على هذه الفترة.

الحل:

مبدأ ملاحظة تسهيل الخوارزمية:

1) نلاحظ أن الدالة g ذ.ت.م على $[0,3]$.
لأن g دالة تزايدية تماماً على $[0,3]$ وبالتالي فهي تزايدية تماماً على الفترة المغلقة $[0,x]$ لكل $x \leq 3$ ومن هنا نستنتج أن g ذ.ت.م على $[0,x]$.
عندها في هذه الحالة أي تجزئة P للفترة $[0,x]$ تكون مناسبة لأن g تزايدية تماماً:

$$v(g;P) = \sum_{k=1}^{n} |g(x_k) - g(x_{k-1})|$$

$$= g(x) - g(0) = g(x) - 1$$

$$= x^2 + 1 - 1 = x^2$$ (تلاشي الحدود مع بعضها)

(3) نأخذ التغير الكلي للمثال السابق.

$$V_0^x(g) = \sup\{ \sigma^2 ; P \in \mathbb{P}_{[0,x]} \}$$

$$= x^2.$$

وعليه تكون دالة التغير هي هو دالة.

$$V_g(x) = V_0^x(g) = \begin{cases} x^2 ; & 0 < x \le 3 \\ 0 ; & x = 0 \end{cases}$$

وذلك لكل قيم $x \in [0,3]$ مع ملاحظة أن $V_g(0) = 0$

نحسب الآن التغير الكلي لدالة التغير $[0,3]$ للدالة g وهي:

$$V_0^3(V_g) = 3^2 - 0^2 = 9$$ لأنها متزايدة

$$= V_0^3(g)$$ وحسب المبرهنة:

وهذا يوافق الملاحظة السابقة.

- مناقشة

أوجد دالة التغير للدوال:

$$h(x) = \sqrt[3]{x} \; ; \quad 1 \le x \le 5$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 ; & 0 \le x < 1 \\ 5 ; & x = 1 \\ x+3 ; & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

(4) يلزم ويكفي:

تكون الدالة f حيث $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ذات تغير محدود إذا وفقط إذا وجدت دالة F متزايدة ومحدودة على نفس الفترة وتحقق المتباينة:

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le F(x_2) - F(x_1)$$

$$a \le x_1 < x_2 \le b$$

مطلوب من الكتاب.

(5) ثبات الدالة ذات [illegible]

1) $f = g - h \iff$ f د.ت.م على $[a,b]$

كتبت f على $[a,b]$ فرق دالتين متزايدتين تزايداً تاماً أو متناقصتين و محدودتين على $[a,b]$.

2) نتيجة

$f = g(x) - h(x) \iff$ f د.ت.م على $[a,b]$ ، $f \in C[a,b]$ (مستمرة على $[a,b]$)

حيث h ، g دالتان متزايدتان (متناقصتان) ومستمرتان على $[a,b]$.

مثال:

$f = (x^2+1) - [x]$

دالتان متزايدتان

$\Leftarrow$ f د.ت.م على $[0,3]$.